



TITLE:

# 吸い込みのまわりの渦流の発生とその構造 (流れの不安定性と乱流)

AUTHOR(S):

川久保, 達之

---

CITATION:

川久保, 達之. 吸い込みのまわりの渦流の発生とその構造 (流れの不安定性と乱流). 数理解析研究所講究録 1980, 390: 130-145

ISSUE DATE:

1980-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104937>

RIGHT:

## 吸い込みのまわりの渦流の発生とその構造

東工大 理 川久保達之

### § 1 はじめに

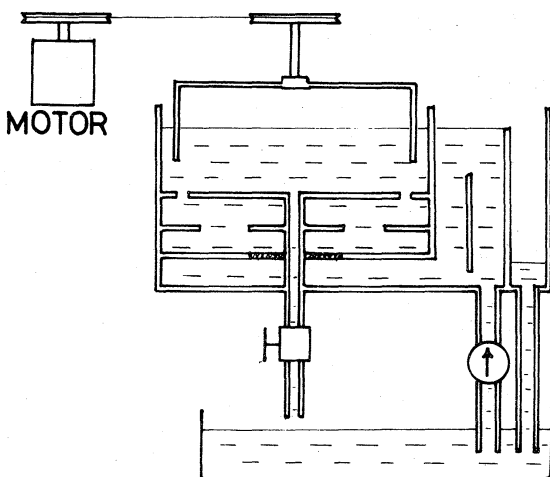
吸い込みのまわりに発生する渦は古くから bath tub vortex として知られ、台風やたつ巻きのような気象現象や、サクションポンプによる排水の際の渦発生による排水効率の低下など工本工学の問題とも関連して重要であるが、その発生の機構は必ずしもはっきりしていないようである。われわれは8年程前から電氣的発振やベナール対流のようなエネルギーをとりこみながらそれからマクロな運動を発現する、いわゆる<sup>1,2)</sup>非平衡開放系における自己組織化の現象に興味をもって実験を重ねてきたが、2年前からは、吸い込みのまわりに発生する渦もこの種の自己励起現象の一つではないかと考えて渦流速の測定を行って<sup>3,4)</sup>きた。その結果渦は吸い込み口から流出する流量 $Q$ の値がある閾値を越えるときに発生し、それ以下では成長しない傾向があることがわかったが、その閾値は周囲

の流れの状態に著しく左右されはつきりした結論を得られな  
いままである。

そこで境界条件が明確な二つの極端なケースとして中心に  
吸い込み口がある水槽内の水にある半径の円周上で一定の速  
さの回転を与えた場合と、周囲の水の流れを完全に止めた場  
合について、それぞれどんな渦が発生するかと前者はレーガ  
ー流速計を用い、後者は写真を撮ることにより調べた。ここで  
は前者を強制渦、後者を自由渦と名付けることにする。

## § 2 強制渦

実験に用いた水槽は図1に示すようなものである。水槽へ



は下の溜めからポンプで水  
を汲み上げ、汲み上げる際  
に起きた水の動きをなるべく  
抑さえるためにいくつかの  
小孔を通して水槽へ送る。  
あふれた水は水溜めへ落と  
して水深を一定に保つ。水  
槽内には半径 13.5 cm の円  
筒板をいろいろな速さで回  
転させて水に角運動量を与

図1 強制渦測定用水槽

える一方、中心の1 cm 中の吸い込み口から水を流出させ、その流出量 $Q$ はコックで制御した。流速の測定はレーザー流速計によった。

まず図2に円筒を6 rpm の速さで回転させた場合の渦流の速さ $v_\theta$ の $r$  (中心からの距離)依存性を示す。これによ

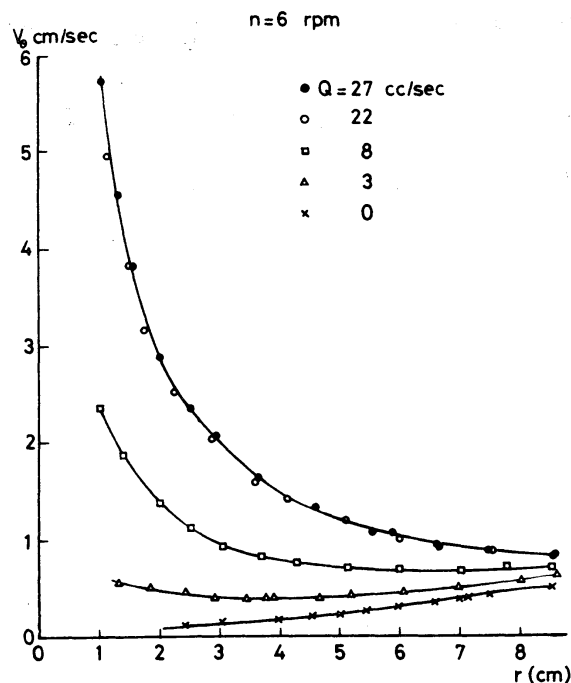
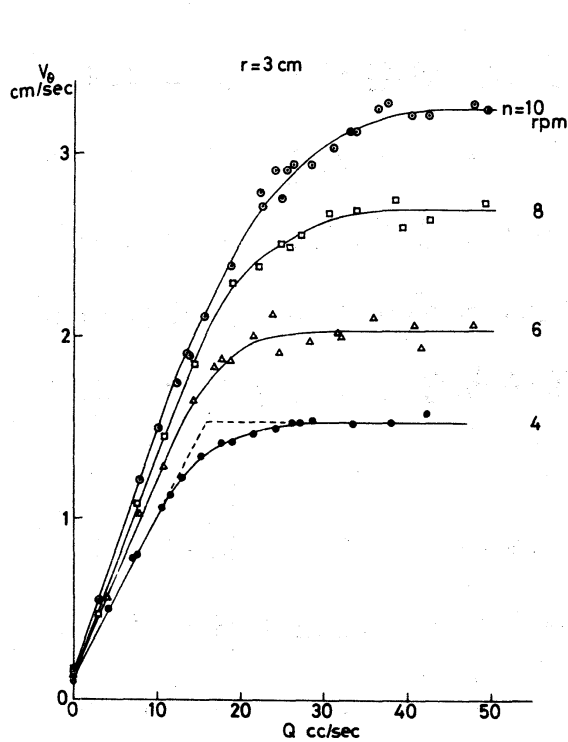
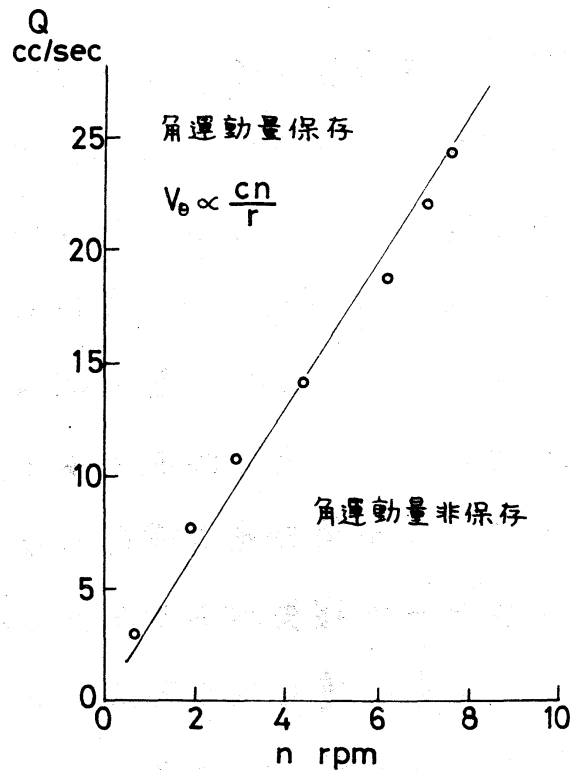


図2  $v_\theta$ の $r$ 依存性

ると流出量 $Q$ がある値以上 (図では  $Q=22, 27$  cc/sec) であると $v_\theta$ は一つに重なって $Q$ によらなくなり、その $r$ 依存性は $1/r$ に比例した形となる。これはいいかえれば、外側で与えた角運動量が内側でも保存されていることを意味する。すなわち $Q$ がある値以上であると外側で与えた角運動量はそのまま内側でも保存されるが、 $Q$ が小さい場合

には保存されない。このことは $v_\theta$ を $Q$ の関数としてプロットした図3を見ても明らかである。図3は $r=3$  cmの位置での $v_\theta$ を円筒の回転数 $n$  (これは $r=13.5$  cmの位置で水に与えた角運動量に比例する)をいろいろ変えた場合の $Q$ 依存性

図3  $V_\theta$  の  $Q$  依存性図4 角運動量を保存する渦と  
保存しない渦の相図

のグラフであるが、図から明らかなように  $Q$  の小さい範囲では  $V_\theta$  は  $Q$  と共に増加しているがある値以上では  $Q$  によらず一定になる。両者の境目は  $n$  によって異なり、また一定になった領域では  $V_\theta$  は  $n$  に比例し、 $r$  依存性を調べると  $r$  に反比例している。

結局吸い込みをもつ強制渦は外から与えた角運動量を中心部分まで保存する渦と保存しない渦とに分けることができ、前者は流出量  $Q$  が大きく、与える角運動量が小さい場合に実現し、後者はその逆の場合に見られる。その移り変りは図3で

見るように多少の幅をもっているが、同図で  $n=4$  の場合の  
 実線で示したように2本の直線を延長した交点によって角運  
 動量を保存する渦と保存しない渦の境界を決め、これを  $n$  と  
 $Q$  の平面上的相図として表わしたのが図4である。相図は直  
 線によって二分され、左上側は角運動量を保存する渦、右下  
 側は保存しない渦の領域である。

ところで角運動量を保存しない渦が生じるのは粘性による  
 エネルギーの損失があるためであるが、粘性が強く効くのは  
 水槽の底に接した境界層の部分の筈である。そこで底から  
 の距離  $z$  の関数として渦流速  $v_\theta$  とともに動径方向の流速  $v_r$   
 を測定した。その結果を図5に示す。図からわかるように  $v_\theta$  は

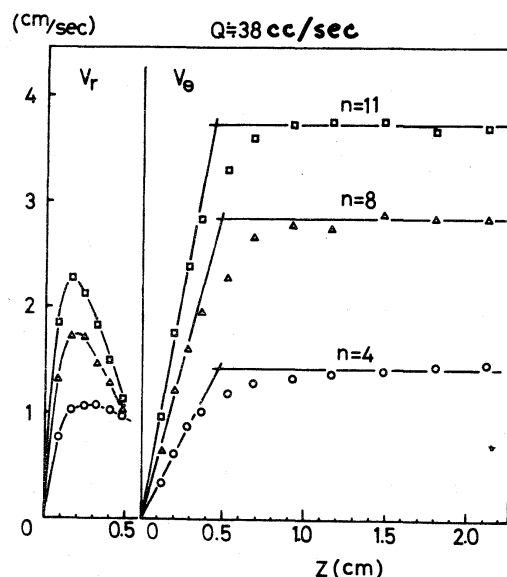


図5  $v_r$ と $v_\theta$ の  $z$  (底から  
 の高さ) 依存性

$z > 1$  cm では一定であるが、特  
 に 0.5 cm 以下では急激に減少す  
 る。一方  $v_r$  は  $z \approx 0.2$  cm あた  
 りで最大値をとり、その値は外  
 周で与えた回転数  $n$  に比例して  
 いる。境界層の厚さは大体 0.5  
 cm 程度とみなすことができ、  
 その中では渦流は急激に減少し  
 ているが、吸い込み口へ向かう  
 動径方向の流れはむしろ境界層

内に集中しているといえる。

さて、 $Q$ と $\eta$ の値いかんによって角運動量を保存する渦と保存しない渦が実現する実験事実を Navier-Stokes の方程式から出発して定性的に説明してみよう。まず円筒座標で表わした Navier-Stokes の方程式

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \boxed{\frac{v_\theta^2}{r}} - v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{F_r}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = -v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \boxed{-\frac{v_r v_\theta}{r}} - v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{F_\theta}{\rho} - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ + \nu \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

から出発する。ここで $\rho$ は密度、 $\nu$ は動粘性係数である。 $\omega$ とまず流れは等方的な二次元流であると考え、 $v_r, v_\theta$ ともに $\theta$ および $z$ 依存性がないものとし、また $F_r=0, F_\theta=0, \partial p/\partial \theta=0$ として下線をした項をすべて省略する。

ところで(1), (2)を比較すると動径方向の流れ $v_r$ から渦流 $v_\theta$ へエネルギーが絶えず移乗されていることが次のようにしてわかる。すなわち(1)に $\rho v_r$ , (2)に $\rho v_\theta$ を掛ける  
と左辺はそれぞれ $\frac{d}{dt} \left( \frac{\rho}{2} v_r^2 \right), \frac{d}{dt} \left( \frac{\rho}{2} v_\theta^2 \right)$ となり運動のエネルギーの時間変化を表わすが、右辺の $\boxed{\phantom{x}}$ で囲んだ第3項はそれぞれ $\frac{\rho}{r} v_\theta^2 v_r, -\frac{\rho}{r} v_\theta^2 v_r$ と符号が逆で絶対値が

等しくなる。いまの場合、吸い込み口へ向かう動径方向の流れを考えていて  $v_r < 0$  であるから、上記のことは動径方向の流れから渦流へ  $\left| \frac{\rho}{r} v_\theta^2 v_r \right|$  のエネルギーが絶えず移乗されていることを意味する。具体的には水の深さを  $h$  として先に述べたように  $h$  とまず 2次元流と考えれば

$$v_r = -\frac{Q}{2\pi r h} \quad (3)$$

である。これを使うと (2) は

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \left( \frac{Q}{2\pi h} - \nu \right) \frac{v_\theta}{r^2} + \left( \frac{Q}{2\pi h} + \nu \right) \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} \quad (4)$$

となるが、この方程式は右辺の第1項の係数が正、 $\frac{Q}{2\pi h} > \nu$  のとき、 $v_\theta$  が時間と共に増加すること意味する。すなわち、吸い込み口への求心的な流れがあると、本来渦は自励的に成長する性質があることを (4) 式は示している。

さていま考えているのは強制渦であるから、求心的な流れの他にある半径の円周上で一定の  $v_\theta$  を与えている場合である。そこで  $r=R$  で  $v_\theta=1$  の境界条件を与えよう。変数を  $r$  から  $x=r/R$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) に変換した後 (4) を

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \left( \frac{Q}{2\pi h} - \nu \right) \frac{v_\theta}{R^2 x^2} + \left( \frac{Q}{2\pi h} + \nu \right) \frac{1}{R^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2} \quad (5)$$

とし、(5) の定常解として



$$v_0 = x^n \quad (6)$$

を仮定する。このとき (5) から

$$\frac{Q}{2\pi R} - \nu + \left( \frac{Q}{2\pi R} + \nu \right) n + \nu n(n-1) = 0$$

$$\text{したがって} \quad n = -1 \quad (7)$$

$$n = 1 - \frac{Q}{2\pi R \nu} \quad (8)$$

の二つの解の存在が可能となる。そこで以下これらの二つの解の安定性を考えてみる。

i) 解  $v_0 = x^{-1}$  の安定性

いま  $v_0$  の  $x$  依存性が  $x^n$  の形を保ったまま,  $n$  が  $-1$  から僅かにずれて  $-1+s$  に変わったとする。すなわち

$$v_0 = x^{-1+s} \quad (9)$$

とよくと

$$\frac{dv_0}{dt} = \log x \cdot x^{s-1} \frac{ds}{dt} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{また (5) の右辺} &= \frac{1}{R^2} \left\{ \left( \frac{Q}{2\pi R} - \nu \right) x^{s-3} + \left( \frac{Q}{2\pi R} + \nu \right) (s-1) x^{s-3} \right. \\ &\quad \left. + \nu (s-1)(s-2) x^{s-3} \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

となる。したがって (10) と (11) とから

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-1}{R^2 x^2 \log x} \left\{ - \left( \frac{Q}{2\pi R} - 2\nu \right) s - \nu s^2 \right\} \quad (12)$$

となり  $\frac{Q}{2\pi R} > 2\nu$  ならば  $s$  は 0 に戻るからこの解は安定で

あるが,  $\frac{Q}{2\pi r} < 2V$  ならば解は不安定で最終的には  $S = 2 - \frac{Q}{2\pi rV}$  したがって (8) に対応するもう一つの解  $v_\theta = x^{1 - \frac{Q}{2\pi rV}}$  に落ちつくことになる。

ii) 解  $v_\theta = x^{1 - \frac{Q}{2\pi rV}}$  の安定性

この場合も  $v_\theta = x^{1 - \frac{Q}{2\pi rV} + S}$  とおいて i) と同様に  $S$  についての方程式をつくり線形項の係数の正負から安定性を判断すると  $\frac{Q}{2\pi r} < 2V$  のとき解は安定であり, 逆に  $\frac{Q}{2\pi r} > 2V$  のとき不安定で, その場合最終的には i) の解  $v_\theta = x^{-1}$  に落ちつくことがわかる。この結果を要約すると図6に示すよう

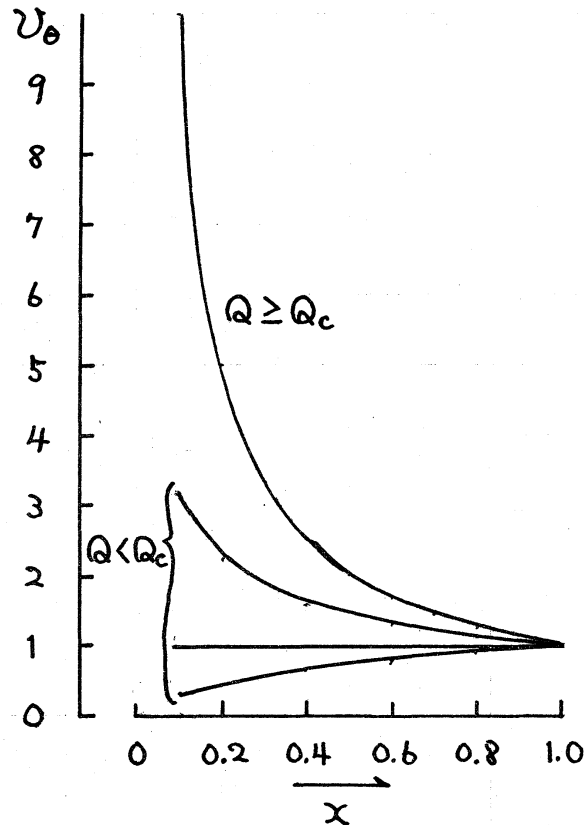


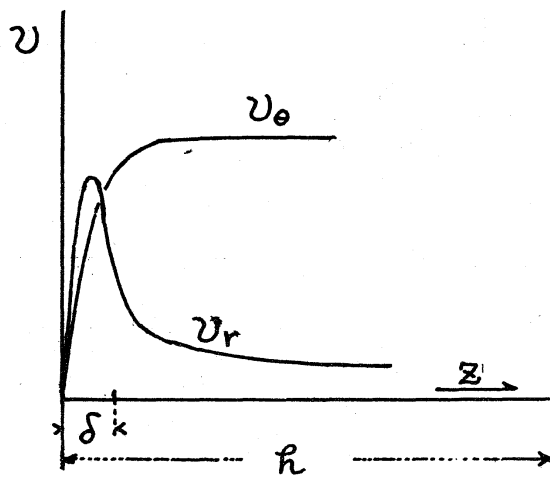
図6  $v_\theta$  の  $x (= r/R)$  依存性

に  $Q_c = 4\pi rV$  を境として  $Q < Q_c$  では  $v_\theta$  の  $x$  依存性は  $Q$  の値によって異なり  $v_\theta = x^{1 - \frac{Q}{2\pi rV}}$  となるが,  $Q > Q_c$  では  $Q$  によらず  $v_\theta = x^{-1}$  となり図2の実験結果と定性的に一致する。

しかしながら以上の結果は実験事実との間に大きな二つの不一致をもっている。その第1点は2種類の異なる解を与える臨界値  $Q_c$

が実験では図3あるいは図4で見えるように周回境界値を与える回転数 $n$ に依っているが理論では境界値には依らない事であり、第2事は $Q_c$ の値の定量的な不一致である。すなわち図4によれば、 $Q_c$ は $n$ に依っており、その値は5~25 cc/sec という値であるが、理論の $Q_c = 4\pi n \nu l$ において実験に用いた水槽での水の深さ $l = 5\text{ cm}$ 、 $20^\circ\text{C}$ における水の動粘性係数 $\nu = 0.01\text{ cm}^2/\text{sec}$ を用いると $Q_c = 0.6\text{ cc/sec}$ と1桁以上小さな値である。

この不一致は図5に示した境界層の存在を考慮するとある程度理解できる。図5の実験結果を模式的に描くと図7のよ



うに吸い込みへ流れ込む水  
心的流れは底から数mmの  
境界層内に集っており、渦  
流は逆に境界層の外で発達  
している。境界層の厚さを  
 $\delta$ 、水深を $l$ とするならば  
先に述べた2次元流の近似

図7  $v_r, v_\theta$ の $z$ 依存性の模式

図

による理論は $v_\theta$ が一定に  
なった $\delta \leq z \leq l$ の範囲で

成り立つ理論である。したがって、そこで用いていた流出量  
は全流出量 $Q$ ではなく、 $\delta \leq z \leq l$ の位置を通過して吸い込み

口へ流れ込む流量

$$q = Q - 2\pi r \int_0^{\delta} v_r dz \quad (13)$$

を用いなければならぬ。そこで閾値  $4\pi R\Delta$  も  $q$  について考えなければならぬ

$$q_c = 4\pi (R - \delta)\Delta \simeq 4\pi R\Delta \quad (R \gg \delta) \quad (14)$$

となり、実際に観測できる流量  $Q$  の閾値としては (13) と (14) から

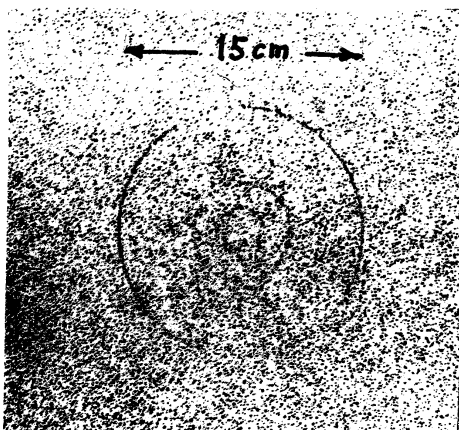
$$Q_c = 4\pi R\Delta + 2\pi r \int_0^{\delta} v_r dz \quad (15)$$

が得られる。この式の右辺の第2項は第1項にくらべて圧倒的に大きく、 $Q_c$  の値は第2項によって決まると考えてよい。図5によれば、 $v_r(z)$  の最大値は  $R$  に比例しているから、 $Q_c$  が  $R$  に比例して増加するという図4の結果も理解できる。

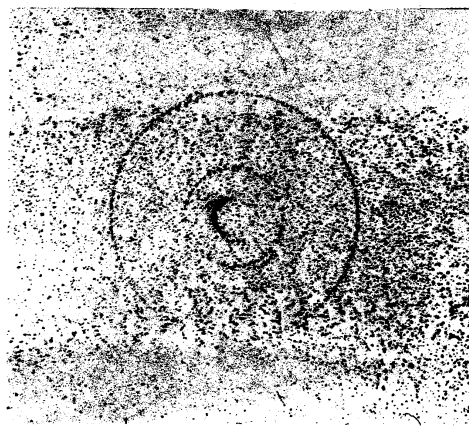
結局のところ吸い込みがある場合、求心的な流れの大部分は底に接した境界層内を流れており、境界層外を流れる残りの部分もと動粘性係数  $\nu$  の効果との競合によって角運動量を保存する渦が実現したり、保存しない渦が実現したりすると考えてよさそうである。しかしながら、求心的な流速  $v_r$  が何故境界層内でのみ大きいのか、その理由が理解された訳ではないから、本質はむしろ境界層内の流れの構造というよりむしろかしい問題に押しやられたともいえよう。

### § 3 自由渦

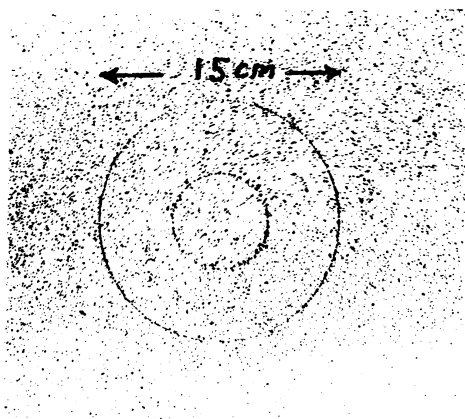
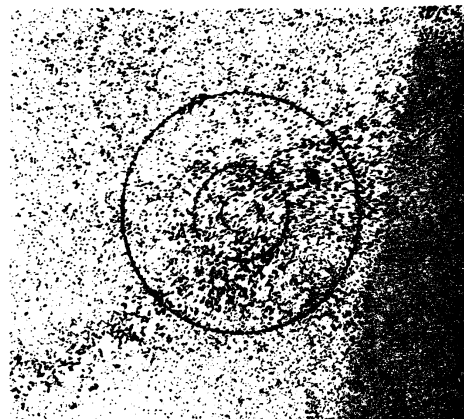
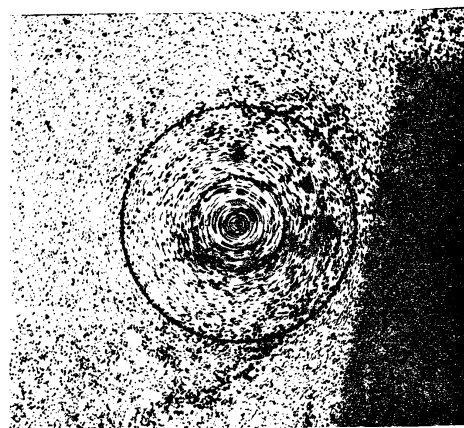
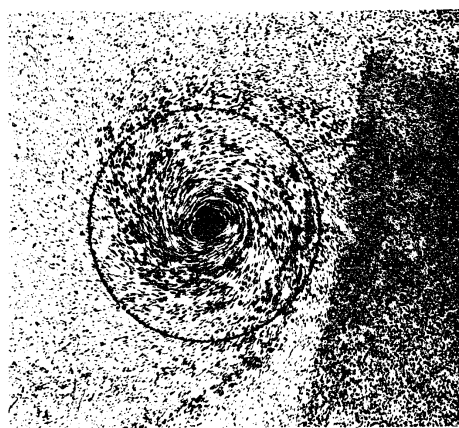
周囲の水の流れを完全に止めた状態で吸い込口から水を流出させるとき渦ができるかどうか、できるとすれば右巻きか左巻きかという問題はもっとも本質的である。これを調べるためには、水を周囲から供給しながら測定したのではどうしても周辺に水の流れが生じるので、水深を一定に保つことはあきらめ、大きな水槽を使って水を供給しない状態で実験を行った。すなわち 1 m 四方の水槽に水を満してアルミニウムの微粉末を浮かべ、数時間経って水の流れが完全に止ったと思われる状態にしてから流出孔のコックを開き、サクシヨンポンプで水をひき、いろいろな  $Q$  に對して発生する渦の状態を観察した。図 8 はその写真の一例である。これによると  $Q = 136 \text{ cc/sec}$  までは渦は形成されていないが、 $Q = 193 \text{ cc/sec}$  では渦に近い動きが現われ、 $Q = 229, 346, 490 \text{ cc/sec}$  と



(a)  $Q = 0 \text{ cc/sec}$



(b)  $Q = 44 \text{ cc/sec}$

(c)  $Q = 136 \text{ cc/sec}$ (d)  $Q = 193 \text{ cc/sec}$ (e)  $Q = 229 \text{ cc/sec}$ (f)  $Q = 346 \text{ cc/sec}$ (g)  $Q = 490 \text{ cc/sec}$ 

# 図 8 自由渦の写真

シャッター開口時間 1 秒

$Q$ が増加するにつれて、はっきりした左巻きの渦が形成されていくのがわかる。同様の観測を8回行ったが、いずれも  $Q = 150 \text{ cc/sec}$  程度から中心に近い部分で回転が始まり、回転の向きはいずれも最終的には左巻きになった。場合によっては一端右巻きの渦ができ、 $Q$ を小さくすることによって左巻きに変わる場合もあった。

意識的に回転のトルクを与えないでもこのように渦が形成されるのは、先にも述べたように、一たび微小な擾乱のような  $v_\theta$  が発生すると動径方向の求心的な流れから  $v_\theta$  に比例するエネルギーが移乗され、 $v_\theta$  を自励的に増加させる性質があるからであろう。これは式で表わせば(4)式の右辺第1項  $\frac{Q}{2\pi R r^2} v_\theta$  である。しかし第1項によって  $v_\theta = 0$  の状態が不安定になっても渦が発生するためには *symmetry breaking* を与えるトリガーが必要である。いいかえると(4)式には渦を左巻きにするか右巻きにするかを決める要因は含まれていないのであって、それを決めるのはミクロでよいから左巻きか右巻きかの小さな  $v_\theta$  (等方的でなくてよい)を与える外力トリガーであろう。このトリガーとしては二つの可能性が考えられる。一つは静止させたつもりでも周辺に僅かに残っている微小な流れであり、もう一つは地球自転によるコリオリ力である。

第1の微小な流れについては、先に述べた実験では水槽に水を入れるとき常に右回りに流れができるように入れたにもかかわらず、発生した渦はすべて左巻きになったというのが事実である。しかしながら水槽の底板の微妙なたわみや底にぬった塗料の凹凸の効果が皆無であったとはいいがたい。一方、地球自転によるコリオリ力の影響は8回の実験の結果、すべて左巻きの渦になったということから十分考えなければならぬ要因であろう。コリオリ力は  $v_r = 1 \text{ cm/sec}$  とするとき、東京あたりでは加速度にして  $8.6 \times 10^{-5} \text{ cm/sec}^2$  程度の小さなものであるが、*symmetry breaking* を与える力は原理的にはどんなに小さくてもよい筈であるから、すべての外的な擾乱を押さえた後でもなおかつ残るものとして考えなければならぬであろう。

最後に渦が発生するための  $Q$  の閾値は実験では  $150 \text{ cc/sec}$  程度であったが、この値は(4)式において  $v_\theta$  が自己成長するための閾値  $Q_c = 2\pi r v_r$  にくらべて圧倒的に大きい。観察によると自由渦の場合も、吸い込み口へ向かう求心的な流れは底に近い部分を這っており、強制渦の場合と同じく底に接した境界層が大きな損失を与えていると思われる。結局のところ、強制渦における二つの型の渦を区別する閾値ならぬに自由渦におけるその成長のための閾値を定量的に理解する



ためには、いずれの場合も境界層流の構造を説明することが先決であるように思われる。

## 文 献

- 1) H. Haken, Synergetics (Springer, Berlin, 1977)
- 2) G. Nicolis and I. Prigogine, Self-Organization in Non-equilibrium Systems (Wiley, New York 1977)  
小島, 相沢 訳, 散逸構造 (岩波書店, 1980)
- 3) T. Kawakubo, Y. Tsuchiya, M. Sugaya and K. Matsumura,  
Phys. Letters 68A (1978) 65.
- 4) T. Kawakubo, S. Kabashima and Y. Tsuchiya, Prog. Theor.  
Phys. Supplement No. 64 (1978) 150.